FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

STUDIENKOLLEG

Mathematik	**Muster zur Zugangsprüfung für beruflich Qualifizierte**	

Bearbeiten Sie die Aufgaben vollständig mit Rechenweg.
Begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^4 - 24x^2 + 11$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf:

   i) Symmetrie,

   ii) Achsenschnittpunkte,

   iii) Extremwerte,

   iv) Wendepunkte.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f über dem Intervall [-3;3]: Verwenden Sie dazu die Ergebnisse aus a) (**Achseneinteilung: x-Achse: 1 Einheit entspricht 2 cm, y-Achse: 5 Einheiten entsprechen 1 cm)**

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Wendenormalen in den beiden Wendepunkten (Eine Normale steht senkrecht auf der Tangente).

d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Wendenormalen.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion vierten Grades, die im Punkt $(0|-5)$ und im Wendepunkt W $(-2|-3)$ Tangenten hat, die parallel zur x – Achse laufen. Überprüfen sie Ihr Ergebnis, indem Sie mindestens drei Bedingungen verifizieren.

Lösungen:
Aufgabe 1

a) i) $f(-x) = f(x)$ => f ist symmetrisch zur y-Achse

ii) y-Achsenabschnitt: $f(0) = 11$, $(0|11)$

Nullstellen: $f(x) = 0$ => $4x^4 - 24x^2 + 11 = 0$

$x^2 = t$ => $4t^2 - 24t + 11 = 0$ => $t_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576-176}}{8}$ => $t_1 = 5{,}5$; $t_2 = 0{,}5$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{t_1} = \pm 5{,}5$; $x_{3/4} = \pm\sqrt{t_2} = \pm 0{,}5$ =>

Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1\left(-\sqrt{5{,}5}\middle|0\right), N_2\left(-\sqrt{0{,}5}\middle|0\right), N_3\left(\sqrt{0{,}5}\middle|0\right), N_4\left(\sqrt{5{,}5}\middle|0\right)$

iii) $f'(x) = 16x^3 - 48x$, $f''(x) = 48x^2 - 48$

<u>mögliche Extremalstellen</u>: $f'(x) = 0$ => $16x(x^2-3) = 0$ => $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$,

<u>Kontrolle</u>: $f''(0) = -48 < 0$ => 0 ist eine relative Maximalstelle,

$f''\left(\sqrt{3}\right) = 96 > 0$=> $\sqrt{3}$ ist eine relative Minimalstelle,

$-\sqrt{3}$ ist eine relative Minimalstelle wegen der Symmetrie zur y-Achse.

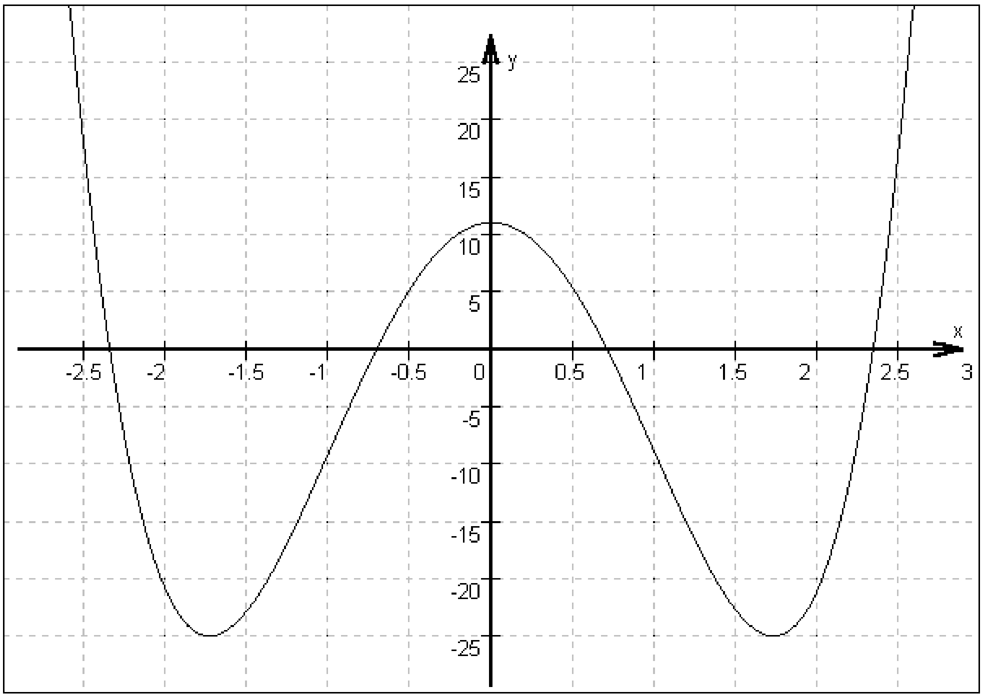
<u>Punkte:</u> $H(0|11)$, $T_{1,2}\left(\pm\sqrt{3}\middle|-25\right)$

iv) <u>mögliche Wendestellen:</u> $f''(x) = 0$ => $48x^2 - 48 = 0$ => $x_{1/2} = \pm 1$,

<u>Kontrolle:</u> (mit $f'''(x) = 96x$) $f'''(1) = 96 \neq 0$ => 1 ist eine Wendestelle,

-1 ist eine Wendestelle wegen der Symmetrie zur y-Achse.

<u>Punkte:</u> $W_{1,2}(\pm 1|-9)$



c) $n_1(x) = mx + b$, $m = -\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$; $n_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{28}{3}$, $n_2(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{28}{3}$ (Sym. zur y-Achse)

d) $S\left(0\middle|-\frac{28}{3}\right)$

Aufgabe 2

allg. Gleichung: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Ableitungen: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $\quad f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Gleichungen:
Punkt P: (1) f(0) = – 5 => e = – 5
(2) f´(0) = 0 => d = 0 (waagerechte Tangente)
Wendepunkt: (3) f(-2) = – 3 => 16a – 8b + 4c – 2d + e = – 3
(4) f″(-2) = 0 => 48a – 12b + 2c = 0
(5) f´(-2) = 0 => -32a +12b – 4c + d = 0 (waag. Tangente)

Lineares Gleichungssystem: (durch Einsetzen von d und e)

(3´) 16a – 8b + 4c = 2

(4) 48a – 12b + 2c = 0

(5´) -32a +12b – 4c = 0

Lösen des Gleichungssystems: (6) = 2*(4) – (3´): 80a – 16b = -2
(7) = (5´) + (3´): -16a + 4b = 2
(8) = (6) + 4*(7): 16a = 6 => a = 0,375
Aus (7): b = 2, aus (4): c = 3

Gleichung der Funktion f : $f(x) = \frac{3}{8}x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5$

Kontrolle:
(1) f(0) = – 5 => e = – 5
(2) f´(0) = 0 $\left(f'(x) = \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 + 6x \right)$
(3) f(-2) = – 3 (6 – 16 + 12 – 5 = –3)
(4) f″(-2) = 0 $\left(f''(x) = \frac{9}{2}x^2 + 12x + 6,\ f''(-2) = 18 - 24 + 6 = 0 \right)$
(5) f´(-2) = 0 (f‘(–2) = –12 + 24 – 12 = 0)