Muster FSP T-Kurs

Aufgabe 1:

a) für $a > 0$:

$$\lim_{x\to\infty}(axe^x - 2e^x) = \lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\infty}\underbrace{(ax-2)}_{\infty}) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\underbrace{e^x}_{0}\underbrace{(ax-2)}_{-\infty}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\nearrow\infty}{ax-2}}{\underbrace{e^{-x}}_{\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{\underbrace{-e^{-x}}_{\infty}} = 0$$

für $a < 0$:

$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^x}_{\infty}\underbrace{(ax-2)}_{-\infty}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\nearrow\infty}{ax-2}}{\underbrace{e^{-x}}_{\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a}{-e^{-x}} = 0$$

8 min

b) $f_a(x) = 0$

$e^x(ax-2) = 0$

$\Rightarrow \quad ax - 2 = 0 \qquad$ weil $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{a} \qquad$ (für $a \neq 0$)

3 min

c) $f_a'(x) = ae^x + (ax-2)e^x = (ax+a-2)e^x$

$f_a''(x) = (ax+2a-2)e^x$

$f_a'''(x) = (ax+3a-2)e^x$

6 min

d) notwendiges Kriterium: $f_a'(x) = 0$

$(ax+a-2)e^x = 0$

$\Rightarrow \quad ax + a - 2 = 0 \qquad$ weil $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-a+2}{a} = -1 + \frac{2}{a} \qquad$ (für $a \neq 0$)

hinreichendes Kriterium: $f_a''(x_E) \lessgtr 0$

$f_a''(-1+\frac{2}{a}) = (a\frac{-a+2}{a} + 2a - 2)e^{\frac{-a+2}{a}} = a \cdot e^{\frac{-a+2}{a}}$

weil $e^{\frac{a-2}{a}} > 0 \ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ wird a betrachtet

$$a \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 0 \Rightarrow \text{Minimum}, T\left(\frac{-a+2}{a} \middle| -ae^{\frac{-a+2}{a}}\right) \\ < 0 & \text{für } a < 0 \Rightarrow \text{Maximum}, H\left(\frac{-a+2}{a} \middle| -ae^{\frac{-a+2}{a}}\right) \end{cases}$$

$f_a\left(\frac{-a+2}{a}\right) = (-a+2)e^{\frac{-a+2}{a}} - 2e^{\frac{-a+2}{a}} = -ae^{\frac{-a+2}{a}}$ 10 min

e) notwendiges Kriterium: $f_a''(x) = 0$

$(ax + 2a - 2)\, e^x = 0$

$\Rightarrow \; ax + 2a - 2 = 0$ weil $e^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \; x = \frac{-2a+2}{a}$ für $a \neq 0$

hinreichendes Kriterium: $f_a'''(x_w) \neq 0$

$f_a'''\left(\frac{-2a+2}{a}\right) = (-2a + 2 + 3a - 2)\, e^{\frac{-2a+2}{a}}$
$>0 \; \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$= \underbrace{a}_{\neq 0} \cdot \underbrace{e^{\frac{-2a+2}{a}}}_{>0 \; \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

$\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W\left(\frac{-2a+2}{a} \,\middle|\, -2a \cdot e^{\frac{2-2a}{a}}\right)$

$f_a\left(\frac{-2a+2}{a}\right) = (-2a+2-2)e^{\frac{-2a+2}{a}} = -2ae^{\frac{-2a+2}{a}}$

Fall $a = 0$: $f_0(x) = -2e^x \Rightarrow$ keine Wendepunkte
(einfache exponentielle Funktion)
9 min

f) $t_w(x) = mx + n$

$m = f_a'\left(\frac{2-2a}{a}\right) = (2 - 2a + a - 2)e^{\frac{2-2a}{a}} = -ae^{\frac{2-2a}{a}}$

W, m in $t_w(x)$ einsetzen:

$-2ae^{\frac{2-2a}{a}} = -ae^{\frac{2-2a}{a}} \cdot \left(\frac{-2a+2}{a}\right) + n$

$\Rightarrow \; -2a \cdot e^{\frac{2-2a}{a}} = (2a+2)\, e^{\frac{2-2a}{a}} + n$

$\Rightarrow \; n = (-4a+2)\, e^{\frac{2-2a}{a}}$

n, m in $t_w(x)$ einsetzen:

$t_w(x) = -ae^{\frac{2-2a}{a}} \cdot x + (-4a+2)e^{\frac{2-2a}{a}}$ 7 min

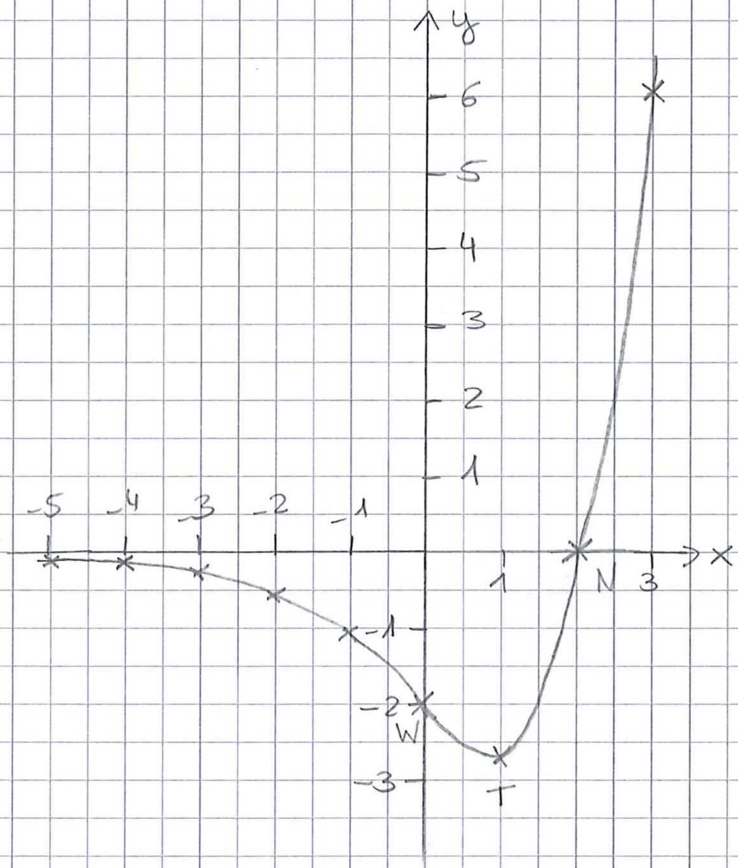
g) $f_1(x) = xe^x - 2e^x$

$N_1(2|0)$, $T(1|-2{,}72)$, $W(0|-2)$

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	-0,05	-0,11	-0,25	-0,54	-1,1

x	0	1	2	2,5
y	-2	-2,72	0	6,09

7 min



10 min

lesen: 5 min

Aufgabe 2:

a) $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2$
$f(-x) = 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2$
$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

alternative Lösung:
ganzrationale Funktion mit nur geraden Exponenten $\Rightarrow$ achsensymmetrisch zur y-Achse

3 min

b) $f'(x) = 2x^3 - 3{,}2x$

$f''(x) = 6x^2 - 3{,}2$

notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

$2x^3 - 3{,}2x = 0$

$\Rightarrow 2x(x^2 - 1{,}6) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \lor x^2 - 1{,}6 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1{,}6$

$\Rightarrow x = \sqrt{1{,}6} \lor x = -\sqrt{1{,}6}$

hinreichendes Kriterium: $f''(x_E) > 0$

$f''(0) = -3{,}2 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(\sqrt{1{,}6}) = f''(-\sqrt{1{,}6}) = 6 \cdot 1{,}6 - 3{,}2 = 6{,}4 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

9 min

$g_{Decklinie}(x) = 1$

$f(\sqrt{1{,}6}) = f(-\sqrt{1{,}6}) = -1{,}28$

Abstand: $d = |-1{,}28| + 1 = 2{,}28$

A: Der Abstand der Tiefpunkte zur Decklinie beträgt 2,28 Längeneinheiten.

5 min

c) Länge der Decklinie = Abstand der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g_{Decklinie}(x)$

$f(x) = g(x)$

$0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 = 1$

$\Rightarrow 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 - 1 = 0$

$x^2 = t$ (Substitution)

$\Rightarrow f(t) = 0{,}5t^2 - 1{,}6t - 1 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow t^2 - 3{,}2t - 2 = 0$

$\Rightarrow t_{1/2} = 1{,}6 \pm \sqrt{1{,}6^2 + 2} = 1{,}6 \pm \sqrt{4{,}56}$

$t_1 \approx 3{,}74 \wedge t_2 = -0{,}54$

(Resubstitution:)

$x_{1/2} = \pm\sqrt{-0{,}54}$ keine Lösung

$x_{3/4} = \pm\sqrt{3{,}74} \approx \pm 1{,}93$

Länge: $l = |-1{,}93| + 1{,}93 = 3{,}86$

alternativ: $l = 2 \cdot 1{,}93 = 3{,}86$

A: Die Länge der Decklinie beträgt ca. 3,86 Längeneinheiten.

10 min

d) i. $f(x) = 0$

$x^2(0{,}5x^2 - 1{,}6) = 0$

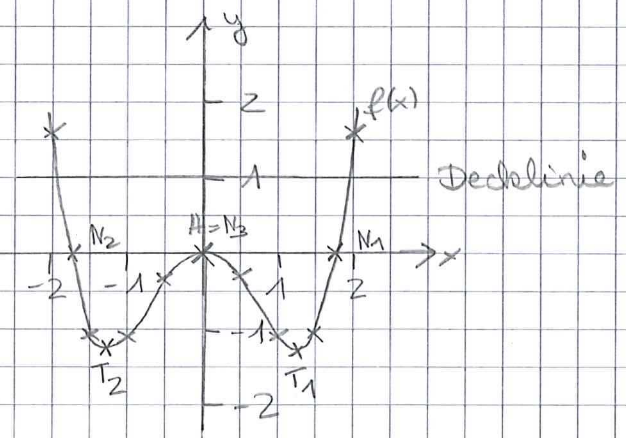
$\Rightarrow x = 0 \vee 0{,}5x^2 - 1{,}6 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3{,}2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3{,}2} \approx \pm 1{,}79$

5 min

ii. $H(0|0)$



12 min

e) $A = 2 \cdot \left| \int_0^{1{,}93} 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 - 1 \, dx \right|$

$= 2\left| \left[0{,}1x^5 - \frac{8}{15}x^3 - x \right]_0^{1{,}93} \right|$

$\approx 2|((2{,}678 - 3{,}834 - 1{,}93) - 0)|$

$\approx 6{,}17$

6 min

f) $A = 2 \cdot \left| \int_{-1{,}79}^{0} 0{,}5x^4 - 1{,}6x^2 \right|$

$= 2 \left| \left[0{,}1x^5 - \frac{8}{15}x^3 \right]_{-1{,}79}^{0} \right|$

$= 2 \cdot \left| (0 - (-1{,}838 + 3{,}059)) \right|$

$\approx 2{,}44$

5 min

Quelle:

Aufgabenidee und Bild entnommen aus:
http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/ga2/HH2007gk13
%20-%20Schiffbau.pdf, letztes Zugriffsdatum:
21.3.2016

lesen: 5 min

Aufgabe 3:

a) achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow$ nur gerade Exponenten

$f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$, $f'(x) = 6ax^5 + 4bx^3 + 2cx$

T bei $x=1$: $f'(1) = 0$ I

$P(0|0{,}5)$: $f(0) = 0{,}5 \Rightarrow d = 0{,}5$

Steigung an der Stelle $x = 0{,}5$: $f'(0{,}5) = -\frac{9}{8}$ II

9 min Integral: $\int_{-0,5}^{0} f(x)\,dx = \frac{523}{2240}$

mit $d=0{,}5 \Rightarrow \int_{-0,5}^{0} ax^6 + bx^4 + cx^2 + 0{,}5\,dx = \frac{523}{2240}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{7}ax^7 + \frac{1}{5}bx^5 + \frac{1}{3}cx^3 + 0{,}5x\right]_{-0,5}^{0} = \frac{523}{2240}$

$\Rightarrow 0 - \left(-\frac{1}{896}a - \frac{1}{160}b - \frac{1}{24}c - 0{,}25\right) = \frac{523}{2240}$

5 min $\Rightarrow \frac{1}{896}a + \frac{1}{160}b + \frac{1}{24}c = \frac{-37}{2240}$ III

LGS:

I $6a + 4b + 2c = 0$

II $\frac{3}{16}a + 0{,}5b + c = -\frac{9}{8}$

III $\frac{1}{896}a + \frac{1}{160}b + \frac{1}{24}c = \frac{-37}{2240}$

I $- 32\cdot$II : II' $-12b - 30c = 36$

I $- 5376$III : III' $-29{,}6b - 222c = 88{,}8$

$29{,}6\cdot$II' $- 12\cdot$III' $\quad 1776c = 0 \Rightarrow c = 0$

c in II' einsetzen: $-12b = 36 \Rightarrow b = -3$

b, c in I einsetzen: $6a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$

12 min $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 0{,}5$

b) $N_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}|0)$, achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow N_2(\frac{1}{\sqrt{2}}|0)$

$\Rightarrow (2x^6-3x^4+\frac{1}{2}):((x-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(x+\frac{1}{\sqrt{2}})) = g(x)$

$$\Rightarrow (2x^6-3x^4+\tfrac{1}{2}):(x^2-\tfrac{1}{2}) = 2x^4-2x^2-1$$

$$\begin{array}{l} -(2x^6-x^4) \\ \hline \quad -2x^4 \\ \quad -(-2x^4+x^2) \\ \hline \qquad -x^2+\frac{1}{2} \\ \qquad -(-x^2+\frac{1}{2}) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

10 min

$g(x)=0$

$x=t^2$ (Substitution)

$2t^2-2t-1=0$

$\Rightarrow t^2-t-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow t_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \wedge t_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

(Resubstitution:) $x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$ nicht lösbar

$x_{3/4}=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \approx \pm 1{,}17$

8 min

c) $A=\left|2\cdot\int_0^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^6-3x^4+\frac{1}{2}\,dx\right|+\left|2\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1{,}17} 2x^6-3x^4+\frac{1}{2}\,dx\right|$

$=\left|2\left[\frac{2}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+\left|2\left[\frac{2}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1{,}17}\right|$

$\approx|2(0{,}2727-0)|+|2(0{,}1270-0{,}2727)|$

$\approx 0{,}84$

11 min

lesen: 5 min

Aufgabe 4:

Bild und Idee aus: ISBN 978-3-06-040013-3, S. 185

a)

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -3+6 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5 min

$$E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

b)

$$d = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 - 3 - 4 = -2$$

3 min

$$E_1: x + y - z = -2$$

c) E_2 in E_1 einsetzen:

$$(3+2u+2v) + (1-2u-4v) - (3+5u-3v) = -2$$

$$\Rightarrow -5u + v = -3$$

$$\Rightarrow v = -3 + 5u$$

v in E_2 einsetzen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-3+5u) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 12 \\ -22 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$

7 min

d) i) A in E_1 einsetzen: $-2 = -2$ ✓ $\Rightarrow A \in E_1$

B in E_1 einsetzen: $-2 = -2$ ✓ $\Rightarrow B \in E_1$

überprüfen, ob A (oder B) auf der Schnittgeraden g liegt

alternativ: prüfen, ob $A \in E_2$ oder $B \in E_2$

$A \in E_2$?

$\Rightarrow$ LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -2 = -3 + 12u \\ \text{II} \quad & 0 = 13 - 22u \quad \Rightarrow u = -\tfrac{13}{22} \\ \text{III} \quad & 0 = 12 - 10u \quad \Rightarrow u = -\tfrac{12}{10} \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \text{Widerspruch} \Rightarrow A \notin E_2$$

A: Durch die Punkte A, B und C wird die Ebene E_1 beschrieben.

8 min

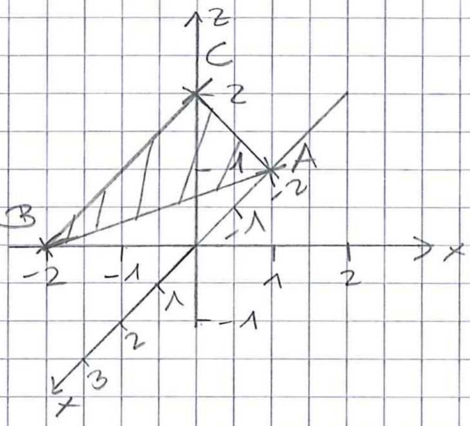
ii. $C(0|0|z)$ in E_1 einsetzen:

$-z = -2 \Rightarrow z = 2$

$C(0|0|2)$

3 min

iii.



10 min

e) i. $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$d(P;E) = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}(-3+1+3)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$$

A: Der Abstand von P zum Bergmassiv beträgt ca. 0,58 Längeneinheiten.

10 min

ii.

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ LGS:

I $\quad 2 = 5 + 3r - 3s$

II $\quad -2 = -3 - 2r + s$

III $\quad z = 4 + r - 2s$

I+3·II: $-4 = -4 - 3r \Rightarrow r = 0$

r in I einsetzen: $2 = 5 - 3s \Rightarrow s = 1$

r, s in III einsetzen: $z = 4 - 2 = 2 > 1$

Die Messung kann nicht stimmen, weil sich der Helikopter unter dem Bergmassiv befinden würde.

9 min