FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

STUDIENKOLLEG

Fach Mathematik	**Schriftliche Prüfung zur Feststellung der Hochschuleignung** **Musterklausur**	**T + W**

Von den vier Aufgabenvorschlägen sind **drei** vollständig zu bearbeiten. **Begründen** Sie Ihre Antworten durch Rechnungen oder kurze Texte. Zeichnungen bitte vollständig beschriften.

Bearbeitungszeit : 180 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig)

Vorschlag 1: (Flächenberechnung, Extremwert)

Gegeben sei die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^2}(4x^2 + x + 3); a \in \mathbb{R}, \mathbf{a > 0}$,

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a positiv sind. (Hinweis: Untersuchen Sie f_a auf Nullstellen oder bestimmen Sie die Scheitelpunktsform von f_a)

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche $A(a)$ unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ in Abhängigkeit von a .

c) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen und der zu berechnenden Fläche für $a = 2$ auf Millimeterpapier an. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle an den Stellen $0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3$.

   Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 4 cm**; y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm.**

d) Berechnen Sie die Flächeninhalt für $a = 2$.

e) Für welchen Wert von $a > 0$ wird der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ minimal?

f) Für welche $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f_a über dem Intervall $[0;a]$ gleich 9 ?

g) In welchem Verhältnis teilt der Graph von f_2 das Rechteck aus den Punkten $(0|0)$, $(3|0)$, $(3|f_2(3))$ und $(0|f_2(3))$. Zeichnen Sie das Rechteck in die Zeichnung aus Teil c) ein und benennen Sie die Teilflächen.

h) Für welches $a > 0$ ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $\mathbf{f_2}$ über dem Intervall $[0;a]$ gleich $\frac{9}{8}a^2$?

Vorschlag 2: (Rekonstruktion einer Funktionsgleichung , Fläche zwischen zwei Graphen)

a) Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades, die durch den Ursprung geht, besitzt den Hochpunkt (2| 64) und an der Stelle $x = -1$ die Tangente $t(x) = -12x - 38$. Wie lautet die Funktionsgleichung von f ? (Lösung zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 48x$)

b) Für welchen Wert von a schneidet die Funktion $g(x) = 10x^2 + ax$ die Funktion f an der Stelle $x = 3$. Geben Sie **alle** Schnittpunkte an .

c) Berechnen sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g .

Vorschlag 3: (Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)^2}$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich;

b) Untersuchen Sie f auf Nullstellen;

c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie;

d) Bestimmen Sie das Verhalten von f bei den Definitionslücken mit Hilfe von Grenzwerten und geben Sie gegebenenfalls senkrechte Asymptoten an;

e) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ (weitere Asymptote);

f) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremal- und Wendepunkte;

g) Legen Sie eine Wertetabelle für $x \in \{-7; -3; 0; 7\}$ an.

h) Zeichnen Sie die Asymptoten und den Graphen von f mit Hilfe der Ergebnisse aus a) bis g) auf Millimeterpapier. Beschriften Sie die Zeichnung vollständig.
Maßstab: x-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 1 cm** , y-Achse: **1 Einheit $\hat{=}$ 2 cm.**

Vorschlag 4: (Analytische Geometrie)

Gegeben seien zwei Geraden g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$ und g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 in einer Ebene E_1 liegen, indem Sie nachweisen, dass sie sich schneiden. Geben Sie den Schnittpunkt an.

b) Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene E_1 an.

c) Berechnen Sie die Spurgerade von E_1 in der xz-Ebene.

d) Geben Sie eine Normalengleichung der Ebene $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$ an.

e) Welche Lage nehmen die Ebenen E_1 und E_2 zueinander ein? Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

Gegeben sei weiter eine dritte Gerade g_3 , die durch die Punkte $P(-2 \mid 11 \mid 5)$ und $Q(6 \mid 11 \mid 7)$ geht:

f) Bestimmen Sie die Spurpunkte von g_3 in der xy-Ebene und der xz-Ebene.

g) Welche Lage nimmt die Gerade g_3 zur Ebene E_2 ein? Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand.